第 1 章　质点运动学

一　运动学基本关系求解

1. 位置、速度、加速度的关系

位置矢量 $\boldsymbol{r}$	瞬时速度	瞬时加速度
$\boxed{\boldsymbol{r}\ =\ x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\ \text{或}\ (x,y,z)}$	$\boxed{\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}}$	$\boxed{\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}}$
路程 l	**瞬时速率**	**瞬时加速度大小**
质点运动经历的轨道长度（**标量**）	$v=\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\lvert\boldsymbol{v}\rvert$	$a=\lvert\boldsymbol{a}\rvert$

运动学关系问题求解

· 根据三者间的微分关系建立微分方程求解（如何求解微分方程见常微分方程讲义）

例 1　（19–20 学年，1）x 轴上作变加速直线运动的质点，已知其初速度为 v_0，初始位置为 x_0，加速度 $a=A+Bt^2$（其中 A，B 均为已知常量），则其速度与时间的关系为__________________，运动学方程为 $x=$____________________.

解　由 $a=A+Bt^2$ & $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，积分得 $v=At+\dfrac{1}{3}Bt^3+C_0$，由初速度 v_0，代入得 $C_0=v_0$

由 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，再次积分得 $x=\dfrac{1}{2}At^2+\dfrac{1}{12}Bt^4+v_0t+C_1$，由初始位置 x_0，代入得 $C_1=x_0$

答　$v=At+\dfrac{1}{3}Bt^3+v_0$　　$x=\dfrac{1}{2}At^2+\dfrac{1}{12}Bt^4+v_0t+x_0$

例 2　（18–19 学年，2）一质量 $m=6\mathrm{kg}$ 的物体在合力 $F=3+4x$（SI）的作用下沿 x 轴运动，设物体开始时静止在坐标原点，则该物体经过 $x=3\mathrm{m}$ 处时的速率 $v=$____________.

解　在这一题中，我们已知的是 a 与 x 的关系，又要求的是某 x 对应的 v，并没有涉及到 t，因此，首先对基本关系式作变换除掉 t 或许是个好思路

由 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，得 $\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}v}{a}$，又由 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，代入消去 $\mathrm{d}t$：$v=a\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}$

由 $a=\dfrac{F}{m}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}x$，代入：$v=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}x\right)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}$

求解（分离变量法）并代入初始条件 $v(x=0)=0$：$\dfrac{1}{2}v^2=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}x^2$　代入 $x=3\mathrm{m}$，求得 $v=3\mathrm{m/s}$

2. 物体关联运动求解

多物体运动关联问题求解

① 找出运动过程中物体位移的恒成立的关系式　② 通过对该关系式求导，获得速度、加速度间的关系

例 3 （07–08 学年，1）在高为 $h=8\text{m}$ 的湖岸上，以恒定的速率 $10\,\text{m/s}$ 收绳，通过绳子拉船靠岸，当船与岸的水平距离也是 8m 时，船的速度等于______________m/s.

解 本题中，绳长 l、船距离 x 和岸高 h 构成直角三角形：$l^2=h^2+x^2$

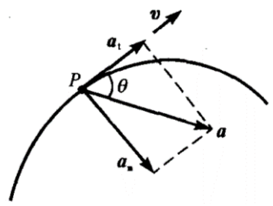
由于对 l 和 x 均随 t 变化，且该式恒成立，因此可以对两侧求导：$l\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

由题意收绳速率 $\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=10\text{m/s}$，且 $h=x=8\text{m}$ 时 $l=8\sqrt{2}\text{m/s}$，解得船速为 $10\sqrt{2}\text{m/s}$

3. 切向与法向加速度

· 若运动轨道已知，则质点在**某点**的加速度可按位置分解为切向加速度与法向加速度(**自然坐标系**)

自然坐标系	
$\boldsymbol{a}=a_{\mathrm{t}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}+a_{\mathrm{n}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$	$a^2=a_{\mathrm{n}}^2+a_{\mathrm{t}}^2$



· **切向加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}$**：与该点速度方向平行的加速度分量，**只改变速度大小**

· **法向加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$**：与该点速度方向垂直的加速度分量，**只改变速度方向**

切向加速度	法向加速度
$a_{\mathrm{t}}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$	$a_{\mathrm{n}}=\dfrac{v^2}{\rho}$

ρ：轨迹在该点的曲率半径

例 4 （17–18 学年，2）已知某质点的速度为 $\boldsymbol{v}=4\boldsymbol{i}+3t\boldsymbol{j}$（SI），则在 $t=1\text{s}$ 时该质点的切向加速度 $a_t=$____________，法向加速度 $a_{\mathrm{n}}=$______________.

解 由 $v=\sqrt{4^2+(3t)^2}$，则 $a_{\mathrm{t}}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{9t}{\sqrt{16+9t^2}}$，$t=1\text{s}$ 时 $a_{\mathrm{t}}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=1.8\text{m/s}^2$

此时 $a=\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|=|3\boldsymbol{j}|=3\text{m/s}$，因此 $a_{\mathrm{n}}=\sqrt{a^2-a_{\mathrm{t}}^2}=\dfrac{12}{5}\text{m/s}^2$

例 5 （15–16 学年，1）一物体作斜抛运动，初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 与水平方向夹角为 θ，如图所示。物体轨道最高点处的曲率半径 ρ 为__________________。

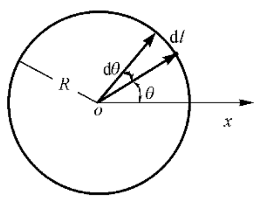
解 在最高处，物体只剩下水平速度 $\boldsymbol{v}=v_0\cos\theta\boldsymbol{i}$，大小 $v=v_0\cos\theta$

此时物体受重力，因此加速度为 g 且竖直向下，则按自然坐标系分解，法向加速度 $a_{\mathrm{n}}=g$

因此由 $a_{\mathrm{n}}=\dfrac{v^2}{\rho}$：$\rho=\dfrac{v^2}{a_{\mathrm{n}}}=\dfrac{v_0^2\cos^2\theta}{g}$

4. 圆周运动的角量描述

角坐标	角速度	角加速度
θ	$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$	$\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$
角坐标与线量的关系	**角速度与线量的关系**	**角加速度与线量的关系**
$l=\theta R$	$v=\omega R$　　$a_{\mathrm{n}}=\omega^2 R$	$a_{\mathrm{t}}=\beta R$



例 6 （12–13 学年，1）在一个转动的齿轮上，一个齿尖 P 沿半径为 R 的圆周运动，其路程随时间的变化规律为 $s=v_0t+bt^2/2$，其中 v_0 和 b 都是正的常量，则 t 时刻齿尖 P 的速度大小为__________，加速度大小为____________。

解 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0+bt$， $a_{\mathrm{t}}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=b$， $a_{\mathrm{n}}=\dfrac{v^2}{R}=\dfrac{(v_0+bt)^2}{R}$， $a=\sqrt{a_{\mathrm{n}}^2+a_{\mathrm{t}}^2}=\sqrt{b^2+\dfrac{(v_0+bt)^4}{R^2}}$

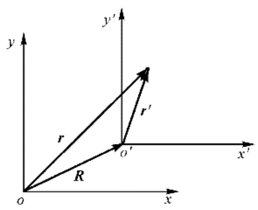
二 相对运动与伽利略变换

1. 内容

· 设 K' 系原点 o' 相对 K 系原点 o 的位矢为 $\boldsymbol{R}$，则 K' 系相对 K 系运动的速度 $\boldsymbol{u}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}$，加速度 $\boldsymbol{a}_0=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$

质点 P 在 K 系中的运动描述为（$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{a}$，t），在 K' 系中为（$\boldsymbol{r}'$，$\boldsymbol{v}'$，$\boldsymbol{a}'$，t'）

· 则有以下变换式成立



伽利略变换		
$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}_0$

$\boldsymbol{v}$ — 绝对速度 $\boldsymbol{v}'$ — 相对速度 $\boldsymbol{u}$ — 牵连速度

$\boldsymbol{a}$ — 绝对加速度 $\boldsymbol{a}'$ — 相对加速度 $\boldsymbol{a}_0$ — 牵连加速度

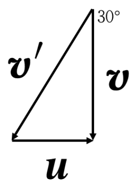
2. 特殊情况

若 K' 系相对 K 系以恒定速度 u 沿 x 轴方向运动，且 $t=0$ 时两坐标系恰好完全重合，则有

伽利略变换的特殊情况		
$\begin{cases}x=x'+ut\\y=y'\end{cases}$	$\begin{cases}v_x=v_x'+u\\v_y=v_y'\end{cases}$	$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'$

例 7 （17–18 学年，3）当一列火车以 10m/s 的速率向东行驶时，若相对于地面竖直下落的雨滴在列车的窗子上形成的雨迹偏离竖直方向 30°，则雨滴相对于地面的速率是____________；相对于列车的速率是____________。

解 设雨滴相对于地面的速度 $\boldsymbol{v}$，相对于列车的速度 $\boldsymbol{v}'$，列车相对地面的速度 $\boldsymbol{u}$，则有



$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}$$

且由题意，$\boldsymbol{u}$ 水平且大小为 10m/s，$\boldsymbol{v}$ 竖直向下，因此三者构成了直角三角形关系

因此 $\dfrac{u}{v}=\tan 30^\circ$， $\dfrac{u}{v'}=\sin 30^\circ$，从而 $v=10\sqrt{3}\mathrm{m/s}$， $v'=20\mathrm{m/s}$